Runden von Messwerten

Bearbeiter: E. Rose, ehem. Kernforschungsanlage Jülich GmbH, Jülich

*) Im Oktober 2007 wurde kein Aktualisierungsbedarf für dieses Lose Blatt festgestellt. Das Plenum des AKU beschloss, dieses Lose Blatt - als quasi zeitlos gültig - in der Loseblattsammlung zu belassen. Der gesamte Text wurde im Juli 2009 von M. Winter durchgesehen und dabei redaktionell, nicht aber inhaltlich überarbeitet.

Inhaltsverzeichnis

In dieser Arbeit vorkommende Begriffe, die im allgemeinen Sprachgebrauch mehrdeutig verwendet werden oder verstanden werden können, sowie neu eingeführte Begriffe sind in Kapitel 12 erklärt. Bei erstmaligem Auftreten solcher Begriffe wird in einer Fußnote darauf hingewiesen.

1 Vorwort und allgemeine Betrachtungen

Kein (noch so genauer) nicht endlicher rationaler Zahlenwert, erst recht kein realer Messwert, kann exakt bzw. „unendlich genau“ (d. h. mit unendlich vielen Stellen) angegeben bzw. geschrieben werden:

- Bei mathematischen Rechnungen ist die Anzahl der Ziffern[1] durch die Leistungsfähigkeit des verwendeten Rechners bestimmt.
- Bei Messwerten hängt die Genauigkeit von den verwendeten Messgeräten und Verfahren sowie von der zu messenden Größe selbst ab.

Es ist daher unumgänglich, alle Zahlenangaben an geeigneter Stelle abzubrechen. Dies muss sinnvoll bzw. problemorientiert geschehen nach folgenden Gesichtspunkten:

a) Ziffern, die über den vorliegenden Genauigkeitsbereich hinausgehen, sind nicht gesichert bzw. nicht zuverlässig[1] und zeigen in der Regel keine Übereinstimmung mehr mit den entsprechenden Ziffern des „wahren Wertes“ [1]. Sie können diesem näherkommen oder von ihm weiter abweichen - beides ist möglich und eine Frage des Zufalls.

b) Durch zu viele Ziffern wird eine erhöhte, aber nicht zutreffende Genauigkeit und Zuverlässigkeit vorgetäuscht. Dies kann zu falschen Schlussfolgerungen und entsprechend falschen Maßnahmen führen. Die häufig verbreitete Meinung, zu viele Ziffern könnten in keinem Fall etwas schaden, günstigstenfalls jedoch nützen, ist nicht nur falsch, sondern gefährlich und daher abzulehnen.

c) Bei richtiger Anwendung gibt die Anzahl der verwendeten Stellen[1] bzw. die Breite der Rundungsstufe[1] (im folgenden Rundungsbreite[1] genannt) einen Informationsgehalt über die Genauigkeit bzw. die Streubreite[1] („Fehler“) des Wertes[2].

d) Bei richtiger Anwendung kann im Bereich der Messgrenze die für mathematische Operationen[1] (Addition, Mittelwertbildung usw.) nicht geeignete Angabe „kleiner als Messgrenze“ (< MG)[1] entfallen und durch eine gestufte Zahlenfolge, beginnend bei der Zahl Null, ersetzt werden.

2 Allgemein gültige Regeln für Rundungsstufen und Rundungsbreiten

Für die Wahl einer sinnvollen, problemorientierten Rundung müssen folgende Gesichtspunkte gelten:

a) Die Stufen müssen äquidistant sein und sollten sich über einen möglichst weiten Zahlenbereich erstrecken (über mindestens eine, nach Möglichkeit zwei Zehnerpotenzen). Änderungen der Rundungsbreite, die beim Übergang in höhere oder niedrigere Zahlenbereiche erforderlich sind, dürfen nicht zu große Sprünge aufweisen, denn jeder derartige Sprung bedeutet eine Unstetigkeit mit unerwünschten Folgen für mathematische Operationen (z. B. für die Mittelwertbildung mit den Zahlen, die in der Nähe der Sprungstellen liegen).

b) Die Rundungsbreite muss größenmäßig im Bereich der doppelten Standardabweichung liegen. In diesem Fall gewährleistet sie vertretbare Konsequenzen und ist statistisch begründet [1]. Gleichzeitig ist damit eine grobe Angabe über die Streuung[1] bzw. die Standardabweichung verbunden, so dass diese unter Umständen entbehrlich wird (siehe Kapitel 9).

---

[1] Siehe Begriffserläuterungen in Kapitel 12

[2] In diesem Zusammenhang wird häufig der Begriff "Fehler" verwendet. Dies sollte jedoch vermieden werden, da es sich nicht um einen Fehler im Sinne eines falschen Wertes handelt, sondern um eine statistische Streuung, die nicht "fehlerhaft" ist, sondern naturgegeben und durchaus korrekt im Sinne eines Naturgesetzes.

c) Der Zahlenwert der Rundungsbreite muss einfach, d. h. einziffrig sein, da sonst der Begriff Rundung illusorisch wäre.

d) Die Zahl 10 muss ohne Rest durch die Rundungsbreite teilbar sein (vgl. hierzu die näheren Ausführungen zu Kapitel 5, Abschnitt 5.2).

Anmerkung zu b): Im Bereich der Standardabweichung ist jede Zahlenangabe mehr oder weniger gleich wahrscheinlich und gibt den wahren Wert[1] mit vergleichbarer Wahrscheinlichkeit wieder. Es ist daher nicht ohne weiteres zu entscheiden, welcher Zahlenwert in diesem Bereich den wahren Wert am zuverlässigsten und besten repräsentiert oder ihm am nächsten kommt. Man begeht daher bei einer entsprechenden Stufung keinen ins Gewicht fallenden Fehler gegenüber der durch den Messvorgang (repräsentiert durch die Standardabweichung) sowieso schon gegebenen Unsicherheit [1].

Ein Nachteil für die Verwendung (sinnvoll) gerundeter Zahlen besteht nicht, auch nicht bei der Einbeziehung in mathematische Operationen. Zur Beweisführung siehe [1].

3 Zuverlässige und nicht zuverlässige Ziffern, durch Runden verursachte Nullen am Ende großer Zahlen (ergänzende Nullen)

3.1 Problemstellung

3.1.1 Zuverlässige und nicht zuverlässige Ziffern[2]

Beim Runden von Messwerten ist zwischen „zuverlässigen“ und „nicht zuverlässigen“ Ziffern zu unterscheiden: Das Runden muss so erfolgen, dass grundsätzlich alle zuverlässigen Ziffern erhalten bleiben und die nicht zuverlässigen nach entsprechender Rundung entfallen. Dabei werden bei ungenauen Werten nur wenige Ziffern übrig bleiben, bei Präzisionsmessungen (z. B. elektromagnetischen Messungen) unter Umständen sehr viele Ziffern. Aus praktischen Gründen kann bei sehr vielen Ziffern oft die Notwendigkeit einer „Verkürzung“[1] der Zahl bestehen. Dann ist dies jedoch gesondert anzugeben.

3.1.2 Durch Rundung verursachte Nullen am Ende großer Zahlen

Rundet man große Zahlen mit vielen Stellen vor dem Komma, so treten Nullen an das Ende dieser Zahlen. Diese Nullen sind normalerweise[3] keine zuverlässigen Nullen; dennoch kann man sie nicht weglassen, da sie zur Darstellung der Größenordnung der Zahl notwendig sind. Diese Art von Nullen wird im Folgenden „ergänzende Nullen“ (Ergänzungsnullen[1]) genannt[4].

Das Mitführen von ergänzenden Nullen kann bei Genauigkeitsbetrachtungen Missverständnisse hervorrufen, da die ergänzenden Nullen nicht von zuverlässigen Nullen zu unterscheiden sind. Sie bedürfen daher eines besonderen Hinweises, was jedoch in der Regel nicht eingehalten wird. Entsprechend dem allgemeinen Sprachgebrauch sind zur Kennzeichnung ergänzender Nullen gelegentlich Aussagen üblich, wie in Tabelle 1 aufgeführt. Die darin aufgeführten Zahlenbeispiele sollen alle gleichermaßen besagen, dass die ersten drei Ziffern (100) von links zuverlässige Ziffern und die daran angeschlossenen nur ergänzende, d. h. nicht zuverlässige Nullen sind.

---

[1] Siehe Begriffserläuterungen in Kapitel 12.

[2] „Zuverlässige“ und „nicht zuverlässige“ Ziffern werden häufig auch „signifikante“ bzw. „nicht signifikante“ Ziffern genannt.

[3] Die Ausnahme bildet die Aufrundung einer Folge von mehreren Neunen am Ende einer Zahl, die zu zuverlässigen Nullen führt. (z. B. Rundung der Zahl 19999,7 auf 20000. Hier sind die vier Nullen zuverlässige Nullen und müssen entsprechend behandelt werden.)

[4] Diese Nullen werden gelegentlich in der Literatur auch „unwesentliche“ Nullen genannt [4]. Da der Begriff „unwesentlich“ jedoch missverstanden werden könnte, wird auf seine Verwendung verzichtet und der Begriff „Ergänzungsnullen“ verwendet.

Es gäbe noch andere Möglichkeiten der Charakterisierung. In jedem Fall müssen die Charakterisierungen eindeutig sein, was in den angegebenen Beispielen nicht in allen Fällen erfüllt ist.

Beispiele einer Zahlenangabe	Charakterisierung der Rundungsbreite	Bemerkungen
100000000	± 500000	eindeutige Aussage
10000000	gerundet auf 5 Dezimalen	nicht eindeutig: wird von vorn oder von hinten gezählt?
1000000	gerundet auf 3 Stellen	
100000	gerundet auf Tausender	

Tabelle 1: Möglichkeiten der Charakterisierung von Rundungsbreiten großer Zahlen (die angegebenen Rundungen stimmen absichtlich nicht mit der Anzahl der Nullen überein)

Alle angegebenen Charakterisierungen sind umständlich, uneinheitlich und vor allem auch nicht immer eindeutig.

3.2 Problemlösung

3.2.1 Durch Rundung verursachte Nullen am Ende großer Zahlen

Da nicht zuverlässige Ziffern nicht angegeben werden dürfen, muss auch für die ergänzenden Nullen eine dafür geeignete Schreibweise verwendet werden wie:

- Man schreibt mit Zehnerpotenzen, wobei die letzte zuverlässige Ziffer der zu rundenden Zahl mindestens eine Stelle hinter dem Komma stehen sollte.
- Die Zehnerpotenzen werden durch eine geeignet gewählte Maßeinheit mit passenden Präfixen (wie ..., mikro-, milli-, kilo-, Mega-, ...) ersetzt.

Dabei sind die Ausführungen von Kapitel 4 zu berücksichtigen[1]. Das Ergebnis ist in Tabelle 3 (Kapitel 4) durch ein Beispiel dargestellt.

4 Die Wahl der richtigen Maßeinheit (Zehnerpotenz)

4.1 Problemstellung

Bei der Schreibweise von Messwerten mit ungeeigneten Zehnerpotenzen bzw. Maßeinheiten und entsprechender Kommaverschiebung tritt häufig ein psychologisch bedeutsamer Effekt auf, dem man in der Regel keine Beachtung schenkt und dem sich auch der erfahrenste Experimentator und Wissenschaftler nicht ohne weiteres entziehen kann: die Vortäuschung falscher Genauigkeiten oder Ungenauigkeiten durch sehr groß oder klein erscheinende Differenzen.

Beispiel:
Eine Messprobe werde von drei verschiedenen Messstellen je fünfmal gemessen (Tabelle 2)

Lfd. Nr.	Messstelle I Angaben in nBq	Messstelle II Angaben in mBq	Messstelle III Angaben in kBq
1	600 000	0,3	0,000 000 3
2	0 [1]	0,5	0,000 001 1
3	300 000	0,0	0,000 000 5
4	700 000	1,0	0,000 000 0
5	900 000	0,7	0,000 000 6

Tabelle 2: Angaben von Messwerten in verschiedenen Maßeinheiten

[1] Zur Schreibweise dieser Zahl siehe Kapitel 8.

Bei genauer Betrachtung erkennt man, dass die drei Messstellen sich hinsichtlich der Genauigkeit gegenseitig nichts nachstehen. Eine Berechnung des Mittelwertes und der Standardabweichung, die im vorliegenden Fall absichtlich ausgelassen wurde, würde dies bestätigen.

Der unbefangene Betrachter wird allerdings die scheinbar riesigen Differenzen der Werte der Messstelle I (Spalte 2) nicht verstehen. Es wird ihm ein denkbar miserabler Messvorgang suggeriert.

Hingegen wird er die sehr klein erscheinenden Differenzen der Werte der Messstelle III (Spalte 4) als sehr wenig voneinander abweichend ansehen, und es wird ihm ein sehr präzise gemessener Vorgang suggeriert.

4.2 Problemlösung

Die Schreibweise der Messwerte ist so zu wählen, dass ein der Genauigkeit des Messvorganges angemessener Eindruck entsteht, d. h. die Wahl des Kommas bzw. der Maßeinheit sollte so ausfallen, dass das Komma zwischen den zuverlässigen Ziffern steht. Falls dies nicht zu gewährleisten ist, sollte man diesem Prinzip unter Anwendung von Kapitel 4 zumindest möglichst nahe zu kommen versuchen.

Eine der möglichen passenden Schreibweisen ist in Tabelle 2, Spalte 3, enthalten (Werte der Messstelle II). Eine ausführlichere Darstellung geeigneter und nicht geeigneter Schreibweisen enthält das Beispiel von Tabelle 3.

Anmerkung: Die Wahl der „angemessenen“ Maßeinheit bzw. Zehnerpotenz entspricht der psychologischen Vorstellungsweise, die für ein interessierendes Problem relevanten Zahlenangaben im Bereich des Kommas zu suchen, wobei die für eine grobe Orientierung wichtigsten Ziffern vor dem Komma und die „Feinheiten“ (genaueren Angaben), die „gewissermaßen“ nur für Detailfragen interessant sind, hinter dem Komma gesucht werden. (Man beachte die Redewendung „auf zwei Stellen genau“, die meistens so verstanden wird, als handele sich um zwei Stellen hinter dem Komma und nicht etwa um die Anzahl der zuverlässigen, anzugebenden Ziffern.)

Beispiel:
Ein Messwert 123456789 Bq soll auf drei gültige Ziffern gerundet werden. Das Ergebnis einiger Schreibweisen ist in Tabelle 3 aufgeführt:

Lfd. Nr.	gerundeter Messwert	Beurteilung	Bemerkungen
1	123 000 000 Bq	falsch	Nullen am Ende nicht von zuverlässigen Nullen zu unterscheiden
2	123 000 000 Bq ± 500 000 Bq	möglich	wegen der vielen Stellen nicht optimal
3	$123 \cdot 10^6$ Bq	geeignet	Ingenieurschreibweise; nicht optimal, da Komma ungünstig steht (beim Runden könnten leicht "ergänzende" Nullen notwendig werden)
4	$0{,}123 \cdot 10^9$ Bq	besser geeignet	Ingenieurschreibweise; besser geeignet als lfd. Nr. 3
5	$1{,}23 \cdot 10^8$ Bq	gut geeignet	Komma steht optimal
6	$12{,}3 \cdot 10^8$ Bq	gut geeignet	Komma steht optimal
7	123 MBq	geeignet	wie lfd. Nr. 3
8	0,123 GBq	besser geeignet	wie lfd. Nr. 4

Tabelle 3: Gut und weniger gut geeignete Schreibweisen eines gerundeten Messwertes

5 Geeignete Ziffern für die Rundungsbreiten

5.1 Problemstellung

Beim bisher üblichen Runden wird so verfahren, dass als Ziffern am Ende der zu rundenden Zahl die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 0 stehen, d. h. die Rundung wird in Einerstufen vorgenommen. Gelegentlich wird als „Verlegenheitslösung“ auch eine halbe Stufe dazwischengeschoben, nämlich dann, wenn man sich nicht so recht für Auf- oder Abrunden eines in der Mitte liegenden Wertes entscheiden mochte. Dies ist jedoch inkonsequent.

Da die absoluten Rundungsbreiten aus Gründen der Messgenauigkeit nicht über viele Zehnerpotenzen gleich bleiben können, müssen in diesem Fall beim Übergang von einem Genauigkeitsbereich zum anderen Sprünge von einer ganzen Zehnerpotenz in Kauf genommen werden wie z. B. bei der aus gerundeten Zahlen bestehenden Folge[1]):

0,01; 0,02; 0,03; ... 0,08; 0,09; 0,l; 0,2; 0,3; ... 0,8; 0,9; 1; 2; 3; ...

Der Übergang von der Rundungsbreite 0,01 (erster Teil der Folge) zur Rundungsbreite 0,1 (zweiter Teil der Folge) und 1 (dritter Teil der Folge) bedeutet einen großen Sprung von einer ganzen Dezimalen. Dieser große Sprung ist für mathematische Operationen mit den Messwerten im Bereich der Sprungstellen (etwa für die Mittelwertbildung) sehr ungeeignet und führt zu Verzerrungen der Ergebnisse.

5.2 Problemlösung

Der Nachteil großer Zehnerpotenzsprünge wird durch das Einschieben kleinerer Zwischengrößen gemildert. Für diese Zwischengroßen müssen folgende Kriterien gelten (vgl. auch Kapitel 2):

1. Sie müssen einfach, d. h. einstellig sein;

2. wegen Anwendung auf viele Größenordnungen von Zahlenbereichen muss der Übergang von einer Stufe zur nächst höheren einer logarithmischen und keiner linearen Folge entsprechen;

3. sie müssen „in das Dezimalsystem passen“, d. h. die Zahl 10 muss ohne Rest durch die Rundungsbreite teilbar sein, da sonst die notwendige Einordnung in das Dezimalsystem schlecht möglich ist.

Unter Anwendung dieser Kriterien sind nur die Ziffern 1, 2 und 5 als Maß für die Rundungsbreiten geeignet.[2]

Diese Zahlen haben die Eigenschaften, in der Zahl 10 ohne Rest „aufzugehen“ und unterscheiden sich – entsprechend der geforderten logarithmischen Stufenfolge – etwa um den gleichen Faktor (Faktor 2 bzw. 2,5).

Da aus der bloßen Angabe einer gerundeten Zahl nicht immer auf die verwendete Rundungsbreite geschlossen werden kann, muss diese gegebenenfalls angegeben werden (Tabelle 4):

---

[1] Die Sprungstellen sind durch ↑ markiert.

[2] Andere Zahlen führen, wenn man ganzzahlige Stufenfolgen (ganzzahlige Vielfache) bildet, sehr schnell zu höchst unzweckmäßigen und merkwürdig erscheinenden Stufen. Z. B. würde die Zahl 7 zu den Stufen 7, 14, 21, 28 …. oder die Zahl 37 (Umrechnung von nCi in Bq) zu den Stufen 37, 74, 111, …. führen; dabei werden unter anderem aus einstelligen Angaben in nCi gleich zwei- und dreistellige Angaben in Bq, was aber nicht im Sinne einer vernünftigen Rundung wäre.

Rundungsbreite	zusätzliche Angaben wie z. B.	
0,1	a) ± 0,05 b) gerundet in Stufen von 0,1 c) Angabe könnte bei hinreichend einheitlicher Konvention auch entfallen[1]	
0,2	a) ± 0,1 b) gerundet in Stufen von 0,2	eine davon notwendig
0,5	a) ± 0,25 b) gerundet in Stufen von 0,5	eine davon notwendig

Tabelle 4: Angaben zur Charakterisierung der Rundungsbreiten (bei den Rundungsbreiten 0,2 und 0,5 ist eine Angabe erforderlich)

Durch entsprechende Verschiebung des Kommas erhält man jeweils die in Frage kommenden Werte für andere Dezimalbereiche.

6 Der Grenzfall des Auf- und Abrundens an der Stufengrenze (Rundungsgrenze)[2]

6.1 Problemstellung

Nach den üblichen Regeln ist beim Runden so zu verfahren, dass an der arithmetischen Mitte zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stufen (Stufengrenze bzw. Rundungsgrenze) entschieden wird, ob nach oben oder nach unten zu runden ist („aufrunden, abrunden“)[2]. Konventionellerweise wird dabei der in der Mitte liegende Wert, die Rundungsgrenze, nach oben gerundet (aufgerundet)
(siehe Tabelle 5):

Originalwert	gerundeter Wert
0,11	0,1
0,13	0,1
0,15	0,2
0,17	0,2
0,19	0,2
Σ 0,75	Σ 0,8

Tabelle 5: Bisherige Regel für das Runden an der Rundungsgrenze

Diese scheinbar nicht zu diskutierende Regel ist, statistisch gesehen, bedenklich: Die Mitte zwischen zwei Zahlen (z. B. der Wert 0,15 in Tabelle 5) gehört nach der Wahrscheinlichkeit eigentlich zu beiden Seiten (d. h. zu den gerundeten Werten 0,l und 0,2) gleichermaßen. Nur unter Berücksichtigung dieser Voraussetzung wird sie bei mathematischen Rechenoperationen wie Summation, Mittelwertbildung und dergleichen richtig berücksichtigt. Bei einseitiger Bevorzugung der Zuordnung zur oberen Stufe entsteht eine systematische Überbewertung der mathematisch daraus errechneten Resultate, und sie werden daher falsch für genauere Betrachtungen[3].

Ein Vergleich der Summen in Tabelle 5 zeigt, dass eine statistische Übereinstimmung der gerundeten und der nicht gerundeten Zahlen nicht gegeben ist (im Gegensatz dazu siehe Tabelle 6).

---

[1] Dies könnte z. B. – wie z.Zt. üblich – dadurch geschehen, dass, wenn keine Angabe vorliegt, grundsätzlich nur die laufenden ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3, … als letzte Ziffern verwendet werden.
[2] Siehe Begriffserläuterungen in Kapitel 12.
[3] Im ungünstigsten Fall um 9 % zu hoch.

6.2 Problemlösung

Zur Lösung bieten sich folgende Möglichkeiten:

1. Die Rundungsgrenzen werden (streng) abwechselnd auf- und abgerundet, wobei der erste Schritt dem Zufall überlassen werden sollte (kann). Diese Methode muss immer dann angewendet werden, wenn sich die Werte nur im Bereich von etwa ein bis drei Stufen bewegen.

2. Bei Werten, die über einen größeren Zahlenbereich statistisch verteilt streuen, wird die Rundungsgrenze bei Einerstufen jeweils so gerundet, dass die letzte beibehaltene Ziffer stets eine gerade Zahl ist [4], bei den Zweierstufen so, dass die letzte beibehaltene Ziffer durch 4 teilbar ist, und bei den Fünferstufen so, dass die letzte beibehaltene Ziffer stets eine Null ist (Tabelle 6). Mit dieser Regel ist für eine statistische Gleichverteilung gesorgt.

3. Siehe Fußnote[1]

Rundungsbreite 0,1		Rundungsbreite 0,2		Rundungsbreite 0,5	
zu rundender Originalwert	gerundeter Wert	zu rundender Originalwert	gerundeter Wert	zu rundender Originalwert	gerundeter Wert
0,00[2]	0,0	0,0[2]	0,0	0,00[2]	0,0
0,05	0,0	0,1	0,0	0,25	0,0
0,10	0,1	0,2	0,2	0,50	0,5
0,15	0,2	0,3	0,4	0,75	1,0
0,20	0,2	0,4	0,4	1,00	1,0
0,25	0,2	0,5	0,4	1,25	1,0
0,30	0,3	0,6	0,6	1,50	1,5
0,35	0,4	0,7	0,8	1,75	2,0
Σ: 1,40	Σ: 1,4	Σ: 2,8	Σ: 2,8	Σ: 7,00	Σ: 7,0

Tabelle 6: Rundungsregel für die Auf- und Abrundung der Rundungsgrenze

Durch entsprechende Verschiebung des Kommas erhält man jeweils die in Frage kommenden Werte für andere Dezimalbereiche.

Ein Vergleich der Summen in Tabelle 6 zeigt, dass eine statistische Übereinstimmung der gerundeten und der nicht gerundeten Zahlen gegeben ist.

In den Abbildungen 1 a bis 1 c ist diese Rundungsregel nochmals grafisch dargestellt.

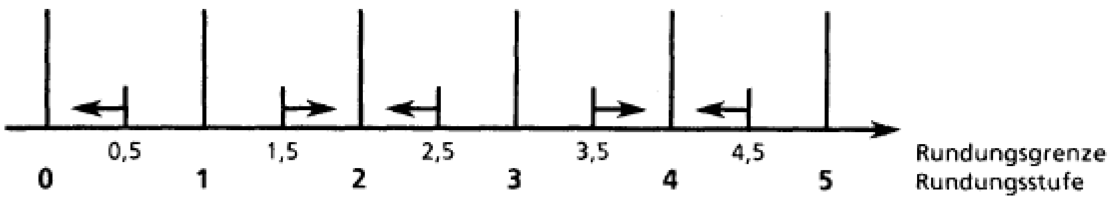

Abbildung 1a: Schematische Darstellung bei Rundungsbreite 1

[1] Die gelegentlich verwendete "Pseudolösung", die Rundungsgrenze nicht auf- oder abzurunden, sondern ihren Wert beizubehalten und dadurch eine zusätzliche weitere Stelle mitzuschleppen, ist als Verstoß gegen die Rundungsregel zu betrachten und sollte daher grundsätzlich verworfen werden.

[2] Zur Schreibweise der Zahl Null siehe Kapitel 8.

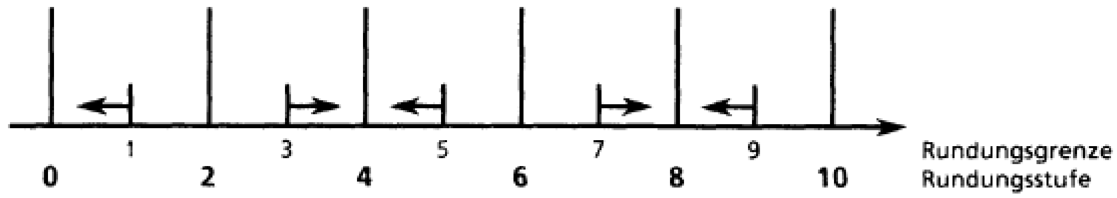

Abbildung 1b: Schematische Darstellung bei Rundungsbreite 2

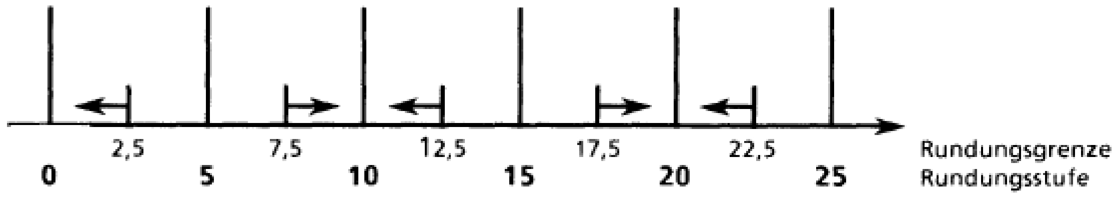

Abbildung 1c: Schematische Darstellung bei Rundungsbreite 5

7 Rechtsbündige Nullen hinter dem Komma

7.1 Problemstellung

In den meisten Fällen ist es immer noch üblich, (rechtsbündige) Nullen am Ende einer Zahl hinter dem Komma auszulassen. In diesen Fällen ist es nicht mehr möglich, die Anzahl der zuverlässigen Nullen am Ende der Zahl zu erkennen.

7.2 Problemlösung

Die zuverlässigen Nullen sind stets mit auszuschreiben, ebenso die gerundeten Nullen (Tabelle 7):

Richtige Schreibweise einer Zahlenfolge bei Rundungsbreite 0,05	falsche Schreibweise der Zahlenfolge
0,00[1]	0
0,05	0,05
0,10	0,1
0,15	0,15
0,20	0,2
-	-
0,85	0,85
0,90	0,9
1,00	1
1,05	1,05
-	-

Tabelle 7: Richtige Schreibweise von Zahlenfolgen mit zuverlässigen und gerundeten Nullen am Ende einer Zahl hinter dem Komma

[1] Bei den Zahlen 0,00 und 1,00 handelt es sich bei der ersten Null hinter dem Komma um eine zuverlässige Null, bei der zweiten Null hinter dem Komma um eine gerundete Null

8 Die Schreibweise der Zahl Null

8.1 Problemstellung

Das in Kapitel 7 behandelte Problem des Weglassens rechtsbündiger Nullen hinter dem Komma gilt auch entsprechend für das Schreiben des Wertes Null. Die Kurzschreibweise „0" lässt keine Rückschlüsse auf die nach dem Komma folgenden zuverlässigen und gerundeten Ziffern, auf die Genauigkeit des Wertes Null sowie die benutzte Rundungsbreite zu, mit der die Zahl „0" gerundet wurde

8.2 Problemlösung

Die Null ist entsprechend den in Kapitel 7 angegebenen Regeln mit der erforderlichen Anzahl der zuverlässigen und gerundeten Nullen nach dem Komma zu schreiben (Tabelle 8).

Rundungsbreite	Angabe der Null	Bedeutet implizit: der Wert ist kleiner als[1]
0,00001	0,00000[2]	< 0,000005
-	-	-
0,01	0,00	< 0,005
0,02	0,00	< 0,01
0,05	0,00	< 0,025
0,1	0,0	< 0,05
0,2	0,0	< 0,1
0,5	0,0	< 0,25

Tabelle 8: Schreibweise der Null bei verschiedenen Rundungsbreiten sowie Zusammenhang zwischen Rundungsbreite und Erkennungsgrenze[1]

Durch entsprechende Verschiebung des Kommas erhält man jeweils die in Frage kommenden Werte für andere Dezimalbereiche.

Mit Hilfe dieser Regel wird auch die Abneigung beseitigt, einen Messwert unterhalb der Erkennungsgrenze nicht mit der Zahl Null angeben zu wollen; denn die Angabe der Zahl Null für einen Messwert unterhalb der Erkennungsgrenze bedeutet nicht, dass es sich um eine exakte Null im mathematischen Sinne handelt. Vielmehr handelt es sich um die Angabe eines Wertes, der der Null so nahe kommt, wie weitere Nullen hinter dem Komma folgen. Darüber hinausgehende Stellen bleiben offen und können von der Null beliebig abweichen.

Damit entfällt auch die für mathematische Operationen nicht verwertbare Angabe „kleiner als Erkennungsgrenze" (<EG) für Werte unterhalb der Erkennungsgrenze; denn die Anzahl der folgenden Nullen nach dem Komma ist gleichzeitig eindeutig repräsentativ für die Erkennungsgrenze, sofern die Rundungsbreite bekannt bzw. angegeben ist (Tabelle 8, Spalte 3).

9 Rundungsbreite und Messgenauigkeit, Ermittlung der Rundungsbreite

Die Rundungsbreite muss, soll sie sinnvoll sein, der Messgenauigkeit des Messvorganges entsprechen. Dieser wird repräsentiert durch die „Gesamtstreuung"[3] (Standardabweichung) der Einzelwerte. Sie soll alle in das Endergebnis eingehenden Streuungen einschließen; denn der Messwert kann letztlich nicht genauer angegeben werden, als es die Gesamtstreuung zulässt.

[1] Die in Spalte 3 mit „<" versehenen Werte sind identisch mit der Erkennungsgrenze [3].

[2] Hier könnte man gemäß Kapitel 4 und 5 auch besser schreiben: $0{,}0 \cdot 10^{-4}$ (siehe dort).

[3] Siehe Begriffserläuterungen in Kapitel 12.

Nach den Untersuchungen von [1] sind Rundungsbreiten bis zum Dreifachen der Standardabweichung ohne großen Einfluss auf Mittelwert- und Summenbildung aus den gerundeten Zahlen (Fehler kleiner als 10 % der Standardabweichung, was im Rahmen solcher Angaben unwesentlich ist).[1]

Im Bereich dieses Dreifachen der Standardabweichung ist jede beliebige Rundungsbreite geeignet und als gleichwertig zu betrachten (vgl. Kapitel 2).

Daraus ergeben sich etwa die in Tabelle 9 aufgeführten Rundungsbreiten

Standardabweichung der Einzelmessung	in Frage kommende Rundungsbreite
± 0,2 …± 0,4	0,5
± 0,4 …± 0,8	1,0
± 0,8 …± 2,0	2,0
± 2 … ± 4	5,0

Tabelle 9: Zusammenhang zwischen Rundungsbreite und Standardabweichung

Durch entsprechende Verschiebung des Kommas erhalt man jeweils die in Frage kommenden Werte für andere Dezimalbereiche.

Anmerkung:
Im Sinne der Entscheidungstheorie der Stochastik bedeutet die Festlegung der Rundungsbreite und -mitte (vgl. Abbildung 2) Folgendes: Wird ein Messwert gerundet, so wird damit ausgesagt, dass dieser Wert nicht zur Verteilung um die darunter- oder darüberliegende Nachbarstufe gehört. Der mit diesen beiden Behauptungen verbundene Irrtum ist jeweils α.

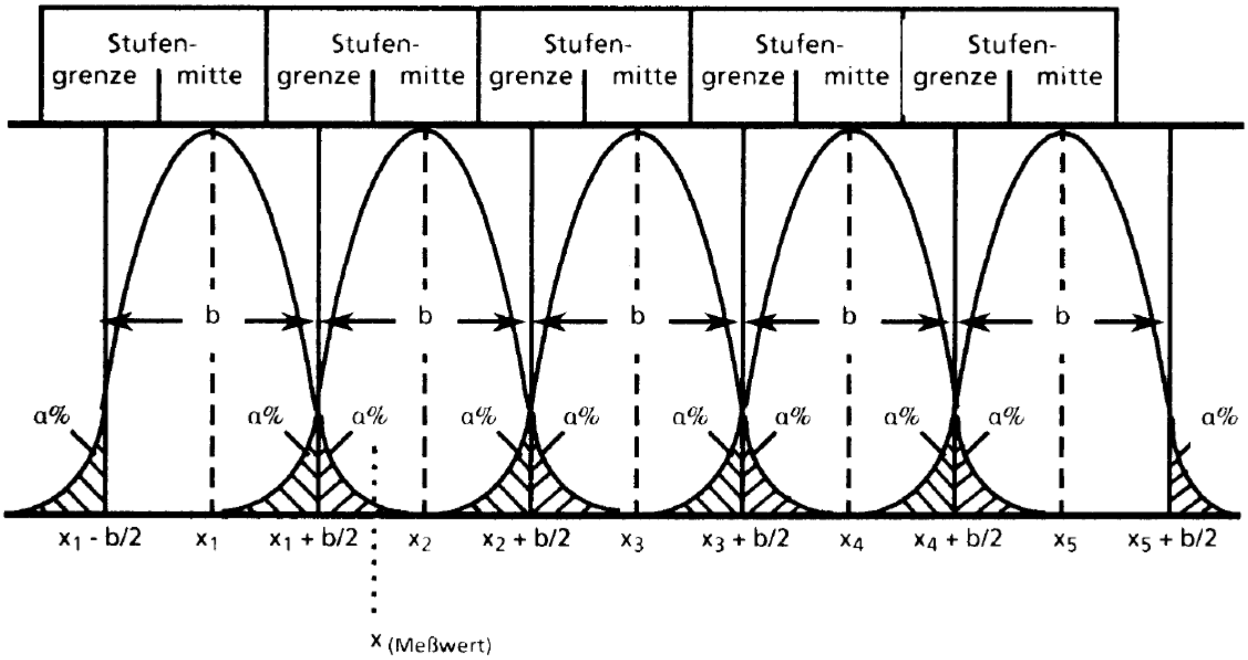

Abbildung 2: Veranschaulichung der Rundungsbreite als Vertrauensbereich der Verteilung um die Stufenmitte

[1] Da die Standardabweichung bereits ein Maß für eine Streuung ist, bedeuten 10 % Abweichung von diesem Streumaß (sozusagen 10 % „Fehler“ eines „Fehlers“) nur sehr wenig.

Beispiel zu Abbildung 2:

Die gerundete Angabe $x \approx x_2$[1] bedeutet: Der Wert x (siehe Abbildung 2) ist mit hinreichender Sicherheit nicht mehr x_1 ($x>x_1$) und noch nicht x_3 ($x<x_3$), wobei der Irrtum für diese beiden Aussagen jeweils α % ist. in Zahlen ausgedrückt:

Es sei $x = 1{,}67$; $x_1 = 1{,}0$; $x_2 = 2{,}0$; $x_3 = 3{,}0$. Daraus folgt: Der Wert $x = 1{,}67$ gehört nicht zur Verteilung um $x_1 = 1{,}0$ (Irrtum < α %), und auch nicht zur Verteilung um $x_3 = 3{,}0$ (Irrtum << α %). Andererseits ist er nicht signifikant vom Wert 2,0 zu unterscheiden. Er kann daher mit hinreichender Berechtigung diesem Wert zugerechnet, d. h. auf 2,0 gerundet werden. Der Irrtum α hängt von der Standardabweichung der Messwerte und der Rundungsbreite ab. Ist die Rundungsbreite zufällig 2 x 1,65 x s (s = Standardabweichung), so ist $\alpha = 5$ %, anderenfalls ist α verschieden von 5 %.

Ist die Standardabweichung in Prozent angegeben, so wird zweckmäßigerweise zunächst auf den Absolutwert umgerechnet und danach die erforderliche Rundungsbreite gemäß Tabelle 9 ermittelt. Anderenfalls kann sie aus dem Nomogramm Abbildung 3 entnommen werden

10 Anzahl der zuverlässigen Stellen einer Zahl und prozentuale Streubreite

Unter der Anzahl der anzugebenden „Stellen“[2] wird in der Praxis häufig die Anzahl der Stellen hinter dem Komma verstanden. Diese weit verbreitete Auffassung ist falsch, zumindest irreführend. Richtig ist stattdessen, dass unter den „anzugebenden, zuverlässigen Stellen“ stets diejenige Anzahl von Ziffern gemeint sein sollte, die insgesamt zur Angabe des Messwertes erforderlich ist, von links beginnend bei der ersten von Null verschiedenen Ziffer. Es handelt sich dabei um diejenigen Ziffern, die man noch zuverlässig messen konnte (vgl. Kapitel 3, Abschnitt 3.1.1) und deren Angabe man daher verantworten kann.

Ist die Standardabweichung nicht in Absolutwerten (siehe Tabelle 9), sondern in Prozentwerten angegeben, so richtet sich die Anzahl der anzugebenden Stellen nach der Mantisse des zu rundenden Zahlenwertes, nach der prozentualen Genauigkeit des Ergebnisses und nach der in Frage kommenden Rundungsbreite (Einer-, Zweier- oder Fünferstufung). Wegen dieser Abhängigkeit von drei Parametern ist es nicht möglich, eine Angabe der Stellenzahl nur in Abhängigkeit von der prozentualen Genauigkeit zu erhalten. Je nach Größe der einzelnen Parameter kann bei gleicher Genauigkeit die erforderliche Stellenzahl eine Stelle mehr oder weniger sein.

Für das hier vorgeschlagene Stufungssystem mit Einer-, Zweier- und Fünferbreite ist die erforderliche Stellenzahl und Rundungsbreite aus dem Nomogramm Abbildung 3 zu entnehmen[3]).

Erläuterungen zum Nomogramm:

a) Die Ziffernfolge der zu rundenden Zahlen wird unter Außerachtlassung der Kommastelle auf der linken Leiter I aufgesucht.

b) Die prozentuale Standardabweichung in Prozent wird auf der rechten Leiter III aufgesucht.

c) Die auf Leiter I und III aufgesuchten Punkte werden durch eine Gerade miteinander verbunden.

---

[1] x = zu rundender Wert und x_2 = gerundeter Wert
[2] Siehe Begriffserläuterungen in Kapitel 12.
[3] Zur Frage einer Berechnung der Stellenzahl und Rundungsbreite mittels eines EDV-Programmes siehe Kapitel 12 „Rundungsprogramme“.

d) Der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden mit der mittleren Leiter II ergibt die Stellenzahl des anzugebenden Wertes und die Rundungsbreite, wobei das Komma entsprechend der Kommastellung des Messwertes zu setzen ist.

Beispiel zur Anwendung des Nomogramms:

Zwei Messwerte „12,345“ und 12,245“ mit der „ Fehlerangabe“ ± 2,5 % sollen entsprechend ihrer Genauigkeit gerundet werden. Da der Begriff „Fehler“ nicht eindeutig ist, ist zunächst zu klären, was unter diesem Begriff im vorliegenden Fall zu verstehen ist (Standardabweichung oder etwas anderes?). Entsprechend ist die Fehlerangabe zunächst in Prozent der Standardabweichung umzurechnen. Im vorliegenden Fall möge mit der „Fehlerangabe“ ± 2,5 % die Standardabweichung ± 2,5 % gemeint sein.

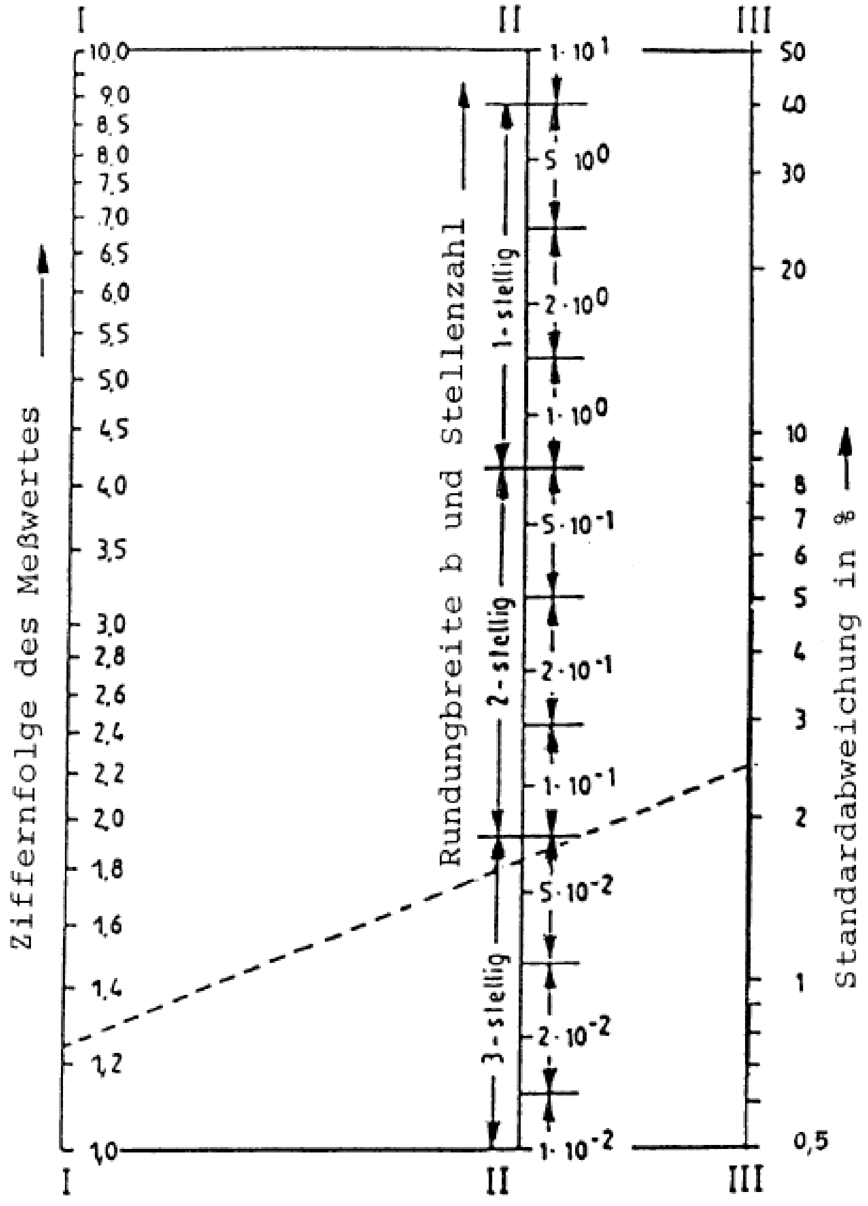

Abbildung 3: Rundungsbreite in Abhängigkeit von der Standardabweichung in % und der Ziffernfolge der zu rundenden Zahl. (Die eingezeichnete gestrichelte Gerade illustriert das auf den Seiten 19 und 20 beschriebene Beispiel.)

Anmerkung: Die auf Skala II angegebene Stellenzahl gilt nur für diejenigen Werte auf Skala I, die kleiner als 10 sind. Wird der Wert 10 erreicht oder überschritten, erhöht sich die Stellenzahl zwangsläufig um eine Stelle. In diesem Fall ist mit der Ablesung auf Skala I wieder bei dem Wert 1,0 zu beginnen

Es wird ein Wert auf der linken Leiter I aufgesucht der etwas über dem Mantissenwert 1,2 liegt, und mit dem Wert 2,5 % Standardabweichung auf der rechten Leiter III verbunden (siehe gestrichelte Gerade in Abbildung 3). Der Schnittpunkt der Verbindungslinie auf der Mittelleiter II ergibt die Stellenzahl 3 und Rundungsbreite 0,05. Unter Berücksichtigung der Kommastelle der beiden Messwerte und der Rundungsbreite sowie entsprechender Umrechnung ergibt sich als Rundungsbreite der Wert 0,5. Die zu rundenden Werte sind daher in Rundungsbreiten zu 0,5 zu runden. Das ergibt für die Werte:

- 12,345 den gerundeten Wert 12,5 (Aufrundung der Ziffern 0,345)
- 12,245 den gerundeten Wert 12,0 (Abrundung der Ziffern 0,245).

Die entstandenen Werte sind dreistellig

11 Runden von Messwerten im Bereich der Null und der Messgrenze[1]

11.1 Allgemeines

Die aufgestellten Rundungsregeln gelten folgerichtig für jeden beliebigen Messwert, d. h. für alle Werte bis herab zur Zahl Null und daher ebenso für die Erkennungs- und Nachweisgrenze[1)]; denn auch diese können bzw. sollten nicht genauer angegeben werden als alle anderen Messwerte. Sie sind daher ebenfalls in gerundeten Stufen anzugeben. Als Rundungsbreiten kommen ebenfalls nur dieselben Ziffern (1, 2 und 5) in Betracht wie bei allen anderen Zahlen.

Erkennungs- und Nachweisgrenze werden entsprechend den für das jeweilige Fachgebiet gültigen Kriterien ermittelt[2], wobei sinnvollerweise von vornherein eine Genauigkeit von 10 % genügt. Dann wird entsprechend den Empfehlungen von Abschnitt 11.2 und 11.3 gerundet.

Beim Runden ist grundsätzlich zu beachten, dass beim Abrunden die Irrtumswahrscheinlichkeiten für eine fehlerhafte Entscheidung an der Erkennungsgrenze und an der Nachweisgrenze zunehmen und beim Aufrunden abnehmen. Gegebenenfalls müssen dadurch bedingte Änderungen ebenfalls nach den für das betreffende Fachgebiet üblichen Kriterien ermittelt werden. Entsprechend der noch zu verantwortenden Irrtumswahrscheinlichkeit wird man sich für die nächst höhere oder tiefere Rundungsziffer entscheiden müssen. Bei dieser Entscheidung sollten keine allzu genauen Maßstäbe angelegt werden, da es sich immer nur um Wahrscheinlichkeiten und Abschätzungen handeln kann. Eine Rundung in den vorgesehenen Stufen wird daher keinen nicht vertretbaren Verlust an Sicherheit bzw. Irrtum bedeuten.

11.2 Runden der Erkennungsgrenze

Normalerweise wird eine konsequente Anwendung der hier aufgestellten Rundungsregeln nicht dazu führen, dass die Erkennungsgrenze mit der untersten Rundungsgrenze[3] exakt übereinstimmt. Dies bedeutet Schwierigkeiten bei der Angabe und Verwertung der daraus resultierenden gerundeten Messwerte im Bereich der Messgrenze[4]. Diese Schwierigkeiten sind nur richtig zu beheben, wenn Erkennungsgrenze und

[1] Siehe Begriffserläuterungen in Kapitel 12.
[2] Für nähere Angaben über die Kriterien zur Feststellung der Erkennungs- und Nachweisgrenze sowie entsprechende Literatur muss auf die einzelnen Fachbereiche verwiesen werden, da bisher unterschiedliche Betrachtungsweisen in Gebrauch sind und es noch kein einheitliches Verfahren gibt.
[3] Grenze zwischen der Rundungsstufe Null und der auf die Null folgenden nächsthöheren Rundungsstufe.
[4] Hierauf kann an dieser Stelle nur hingewiesen, jedoch nicht näher eingegangen werden.

unterste Rundungsgrenze gleichgesetzt werden. Dies ist daher nach Möglichkeit anzustreben (vgl. Abbildungen 4b und 4c).

Solange die Irrtumswahrscheinlichkeiten, die gemäß Kapitel 9 der Bestimmung der Rundungsbreite zugrunde liegen, und die Irrtumswahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art der Erkennungsgrenze übereinstimmen, ist dies relativ einfach möglich. Ist dies nicht der Fall, sollte eine Harmonisierung zwischen den Irrtumswahrscheinlichkeiten für die Rundungsbreite und für die Erkennungsgrenze angestrebt werden derart, dass unterste Rundungsgrenze und Erkennungsgrenze übereinstimmen.

Die Verfahrensweise wird im Folgenden an drei Beispielen (Beispiel 1 in Verbindung mit Abbildung 4) aufgezeigt. Als Irrtumswahrscheinlichkeit wird für die Erkennungsgrenze eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % zugrunde gelegt.

Beispiel 1 (vgl. dazu Abbildung 4a - 4c):
Die Erkennungsgrenze EG eines Untergrundes sei EG = 0,61 Bq (Abbildung 4a). Die nächstliegende Rundungsgrenze (halbe Rundungsbreite) betrage 0,5 Bq. Die Messwerte sind daher wie folgt zu stufen (zu runden):

$$x_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\ \text{Bq (Abb. 4b)}$$

und die Erkennungsgrenze wäre abzurunden auf die Rundungsgrenze 0,5:

$$EG = 0{,}5\ \text{Bq.}$$

Dabei müsste in Kauf genommen werden, dass sich der Fehler erster Art für die Erkennungsgrenze erhöht (von 5 % auf 9 %).

Kann diese Erhöhung nicht vertreten werden, darf z. B. die Irrtumswahrscheinlichkeit keinesfalls größer sein als 5 %, so wäre die nächsthöhere mögliche Rundungsgrenze 1,0 (anstatt 0,5) Bq zu verwenden.

Die Messwerte wären dann wie folgt zu stufen (zu runden):

$$x_1 = 0{,}2{,}4{,}6\ ...\ \text{Bq (Abb.4c)}$$

und die Erkennungsgrenze wäre aufzurunden auf die Rundungsgrenze 1:

$$EG = 1\ \text{Bq.}$$

Der Fehler erster Art für die Erkennungsgrenze wäre dann wesentlich kleiner (0,3 % anstatt 5 %).

Beispiel 2:
Die Erkennungsgrenze eines Untergrundes sei EG = 0,18 Bq. Die nächstgelegene (und zugleich höhere) Rundungsgrenze betrage 0,25. Die Messwerte wären daher wie folgt zu stufen:

$$x_1 = 0{,}0;\ 0{,}5;\ 1{,}0;\ 1{,}5;\ ...\ \text{Bq}$$

Die Erkennungsgrenze wäre aufzurunden auf die Rundungsgrenze 0,25:

$$EG = 0{,}25\ \text{Bq.}$$

Der Fehler erster Art würde damit wesentlich kleiner als 5 %.

Beispiel 3:
Die Erkennungsgrenze eines Untergrundes sei EG = 0,037 Bq. Die nächstgelegene (und zugleich höhere) Rundungsgrenze betrage 0,05. Die Messwerte wären daher wie folgt zu stufen:

$$x_1 = 0{,}0;\ 0{,}l;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ \ldots\ \text{Bq}$$

Die Erkennungsgrenze wäre aufzurunden auf die Rundungsgrenze 0,05:

EG = 0,05 Bq.

Der Fehler erster Art würde damit wiederum wesentlich kleiner als 5 %.

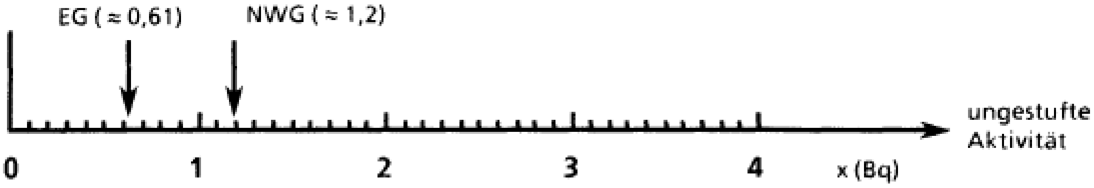

Abbildung 4a: Lage der Erkennungs- und Nachweisgrenze in einem noch nicht passend gestuften Zahlensystem

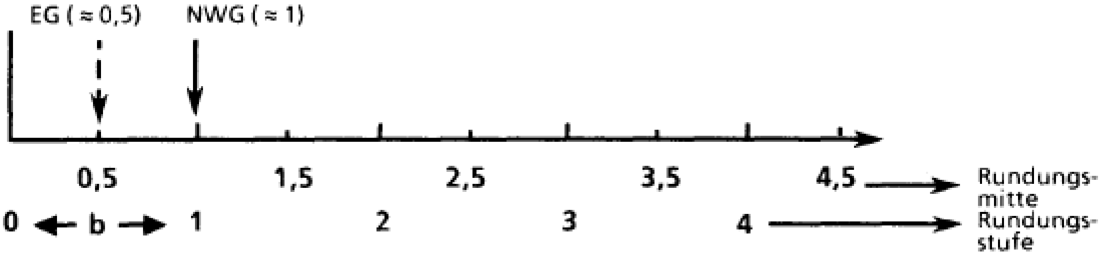

Abbildung 4b: Passend abgestimmte Lage der Erkennungs- und Nachweisgrenze in einem gestuften Zahlensystem (mit etwas erhöhtem Fehler erster und zweiter Art für Erkennungs- und Nachweisgrenze); b = Rundungsbreite

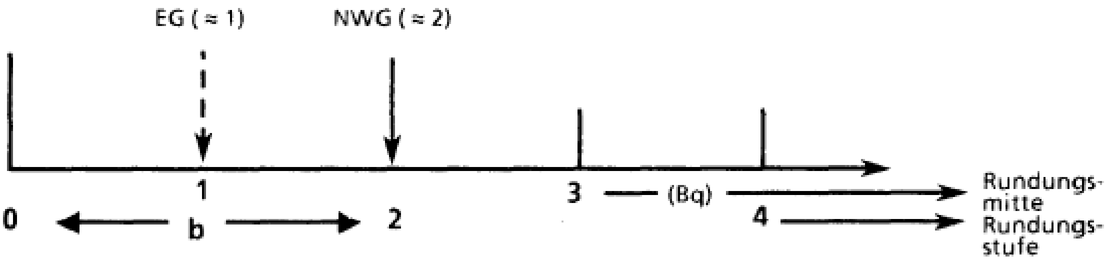

Abbildung 4c: Ebenfalls passend abgestimmte Erkennungs- und Nachweisgrenze (mit niedrigerem Fehler erster und zweiter Art für Erkennungs- und Nachweisgrenze); b = Rundungsbreite

11.3 Runden der Nachweisgrenze

Bei 5 %iger Irrtumswahrscheinlichkeit für Erkennungs- und Nachweisgrenze liegt die Nachweisgrenze etwa im Zahlenbereich der dreifachen Standardabweichung. In diesem Bereich bringen 10 % Änderung der Nachweisgrenze eine Änderung der Irrtumswahrscheinlichkeit zwischen 3,5 und 6,5 % anstelle von 5 %. In Anbetracht der mit diesem Spielraum verbundenen geringen Konsequenzen einer Fehlentscheidung (3,5 % oder 6,5 % Irrtum anstelle von 5 %) reicht es grundsätzlich aus, die Nachweisgrenze mit 10 %iger Genauigkeit anzugeben.

Sie ist dementsprechend gemäß Nomogramm Abbildung 3 zu runden. Dabei ergeben sich höchstens ein- oder zweistellige Zahlen. Eine höhere Genauigkeit wäre unnötig.

In der Regel ist bei Nachweisgrenzen sowieso nur die erste Ziffer gefragt.

In den meisten Fällen wird man die Nachweisgrenze so runden können, dass sie mit der ersten Rundungsstufe oberhalb der Null übereinstimmt (siehe Abbildungen 4a bis 4c). Dies sollte grundsätzlich angestrebt werden.

Beispiel 1 (vgl. dazu Abbildungen 4a bis 4c):
Die zu Beispiel 1 in Kapitel 11.2 gehörende Nachweisgrenze ist 1,2 Bq (gerundet auf zwei Ziffern).

Die nächstliegende Rundungsstufe wäre 1 Bq (Abb. 4b). In Verbindung mit einer Erkennungsgrenze von 0,5 Bq wäre damit eine Verschlechterung des Irrtums zweiter Art für die Nachweisgrenze von 5 % auf 9 % verbunden. Wäre dies nicht akzeptabel, so wäre die nächst höhere Rundungsstufe 2 Bq zu verwenden (Abb. 4c).

Beispiel 2:
Eine Nachweisgrenze sei mit 122 Bq ermittelt worden. Diese wird zunächst gemäß Kapitel 5 in 0,122 kBq umgerechnet und auf 0,1 kBq gerundet. In diesem Fall liegt man nicht ganz auf der sicheren Seite, sondern ein wenig auf der unsicheren.

Will man unbedingt auf der sicheren Seite liegen, wäre der nächsthöhere gerundete Wert 0,2 kBq zu wählen.

12 Erklärung einiger verwendeter Begriffe

In diesem Kapitel werden Begriffe erläutert, die in dieser Arbeit vorkommen und im allgemeinen Sprachgebrauch mehrdeutig verwendet werden oder verstanden werden können.

Abrunden, Aufrunden
Unterbegriffe des Rundens:
Beim Abrunden bleibt die letzte beibehaltene Ziffer unverändert, beim Aufrunden wird sie auf die nächsthöhere Rundungsstufe erhöht. Die Entscheidung, ob ab- oder aufzurunden ist, fallt an der Rundungsgrenze (siehe dort).

Ergänzende Nullen, Ergänzungsnullen (am Ende einer großen Zahl)
Nullen, die am Ende großer Zahlen erforderlich sind, um die durch Runden weggefallenen nicht zuverlässigen Ziffern zu ergänzen bzw. zu ersetzen, damit die Anzahl der Stellen vor dem Komma erhalten bleibt und dadurch die Größenordnung weiterhin zum Ausdruck kommt.

Beispiel:
Rundung der Zahl 123456789 auf drei Stellen ergibt die Zahl 123000000 mit sechs Ergänzungsnullen am Ende. Ergänzungsnullen dürfen nicht mit Rundungsnullen verwechselt werden (siehe dort).

Erkennungsgrenze [3]
Unterbegriff der Messgrenze: Überschreitet ein Messwert die Erkennungsgrenze, so wird entschieden, dass der Wert nicht Nulleffekt (Untergrund oder dergleichen) ist. Dabei begeht man unter Umständen einen Irrtum, der als Fehler erster Art (Abkürzung α) bezeichnet wird. Der Fehler α muss vorher festgelegt werden. Im Allgemeinen wird er mit 5 % (als hinreichend gering) festgelegt (wie z. B. in [3]).

Die Bezeichnung „Erkennungsgrenze“ ist noch nicht endgültig genormt, wird aber hier in diesem Sinne verwendet.

Erwartungswert
Siehe wahrer Wert.

Gesamtstreuung
Siehe Streuung.

Mathematische Operationen
Hier Sammelbegriff für mathematische Operationen (Summation, Multiplikation, Division, Potenzieren usw.), die mit gestuften Werten vorgenommen werden. „Mathematische Operationen“ mit gestuften Werten führen zu gestuften Ergebnissen. Die Streubreite (Standardabweichung) der gestuften Ergebnisse entspricht den Folgen des Fehlerfortpflanzungsgesetzes.

Messgrenze
Nicht genormter, aber häufig gebrauchter, hier hilfsweise verwendeter Oberbegriff für Erkennungs- und Nachweisgrenze (siehe dort).

Nachweisgrenze
Unterbegriff der Messgrenze: Es ist derjenige Erwartungswert eines Messwertes, der mit dem betreffenden Messverfahren mit „hinreichender Sicherheit“ nachgewiesen werden kann.

Dabei wird gefordert, dass bei der Durchführung eines Messvorganges, der die Nachweisgrenze repräsentiert (z. B. die Messung eines Präparates mit einer Aktivität gleich der Nachweisgrenze) mit „hinreichender Sicherheit“ nur Messwerte oberhalb der Erkennungsgrenze (siehe dort) gefunden werden, d. h. Werte, die nicht dem Nulleffekt zugerechnet werden. „Hinreichende Sicherheit“ heißt, dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Messwertes, der unterhalb der Erkennungsgrenze liegt, klein ist. Diese Wahrscheinlichkeit wird als Irrtum zweiter Art (Abkürzung β) bezeichnet. Er wird im Allgemeinen (wie bei der Erkennungsgrenze) mit 5 % angenommen.

Die Nachweisgrenze hängt von der Erkennungsgrenze ab.

Bei gleichem Fehler erster und zweiter Art für die Erkennungs- bzw. Nachweisgrenze ist die Nachweisgrenze etwa das Doppelte der Erkennungsgrenze.

Die Bezeichnung „Nachweisgrenze“ ist noch nicht endgültig genormt, wird hier aber in diesem Sinne benutzt.

Null (zuverlässige, gerundete, ergänzende Nullen)

Zuverlässige und „gerundete“ Nullen erfüllen den gleichen Tatbestand wie jede zuverlässige bzw. durch Rundung entstandene andere Ziffer (siehe dort). Sie dürfen daher beim Runden nicht weggelassen werden. Sie sind von den ergänzenden Nullen (siehe dort) zu unterscheiden

Beispiel :
Ein Wert 999 876 543 möge fünf zuverlässige Stellen haben und soll entsprechend gerundet werden. Es ergibt sich die Zahl 1 000 000 000. Bei dieser ist die erste bis vierte Null zuverlässig und zugleich durch Rundung entstanden, die fünfte Null ist nur durch Rundung entstanden und die sechste bis neunte Null sind ergänzende Nullen.

<u>Rundungsbegriffe:</u>
Runden
Oberbegriff für Ab- und Aufrunden.

Rundungsbreite
Differenz zwischen zwei benachbarten Rundungsstufen.

Rundungsgrenze, Stufengrenze
Arithmetische Mitte zwischen zwei aufeinanderfolgenden gerundeten Zahlenwerten (Rundungsstufen), an der entschieden wird, ob ab- oder aufzurunden ist.

Rundungsnullen
Durch Rundung entstandene Nullen.

Rundungsprogramme:
Ein Ersatz des Nomogramms Abbildung 3 durch ein Rechenprogramm geht von der Grundgleichung

$$b = 2 \cdot s \cdot x$$

(s = Standardabweichung) aus. Von dem sich für b ergebenden Wert ist die erste von Null verschiedene Ziffer von links – unter Beachtung der auf diese Ziffer folgenden weiteren Ziffern – in eine der Ziffern 1, 2 oder 5 zu runden, wobei als Rundungsgrenze die zwischen 1 und 2, 2 und 5 bzw. 5 und 10 liegenden geometrischen Mitten $\sqrt{2} \approx 1{,}5$; $\sqrt{10} \approx 3{,}2$; $\sqrt{50} \approx 7{,}1$ zu verwenden sind.

Die Stellenzahl ergibt sich zwangsläufig aus dem Wert b.

Rundungsstufe
Folge von aufeinanderfolgenden, gerundeten Werten (Zahlen).
Zur Erläuterung aller Rundungsbegriffe siehe Abbildung 5.

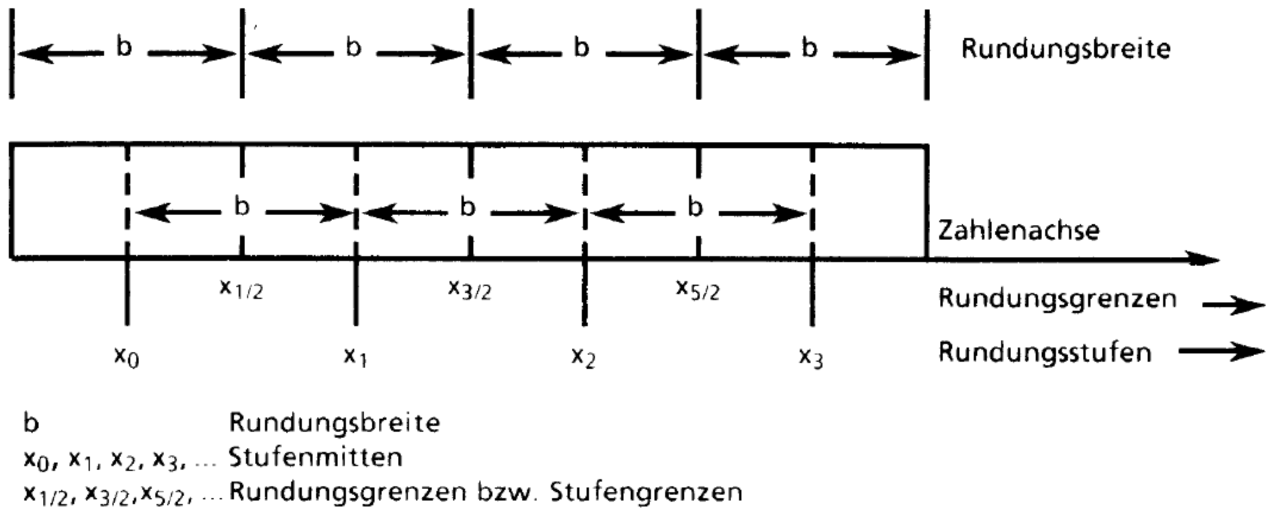

Abbildung 5: Schematische Darstellung der Rundungsbegriffe

signifikant, nicht signifikant
Anderer Ausdruck für zuverlässig, nicht zuverlässig

Stellen, zuverlässige, nicht zuverlässige
Zuverlässige Stellen sind (ohne Rücksicht auf die Kommastellung!) alle diejenigen Stellen eines Messwertes, die nur zuverlässige Ziffern enthalten und als statistisch gesichert gelten müssen. Die darüber hinausgehenden (dahinterliegenden) Stellen enthalten nicht zuverlässige Ziffern (siehe dort).

Streuung, Streubreite, Gesamtstreuung

Im allgemeinen Sprachgebrauch verwendeter Begriff, der die Tatsache ausdrückt, dass physikalische Messwerte in einem bestimmten Bereich um den Erwartungswert streuen. Ein definiertes Maß dafür ist die Standardabweichung. Gesamtstreuung ist die Streuung unter Einschluss aller das Endresultat beeinflussender Faktoren.

Stufengrenze
Siehe Rundungsgrenze und Abbildung 5

Stufenmitte
Mitte einer Rundungsstufe, identisch mit dem gerundeten Zahlenwert und der Rundungsstufe (siehe Abbildung 5).

Verkürzen von Zahlen
Verkürzen ist das Runden von Zahlen mit vielen Ziffern aus Zweckmäßigkeitsgründen auf wenige Stellen ohne Rücksicht auf die Genauigkeit bzw. die Anzahl der zuverlässigen Stellen (siehe dort). Dabei sind die Regeln des Ab- und Aufrundens zu beachten.

Beispiel:
Verkürzen der Zahl n und zweier Brüche auf drei Stellen nach dem Komma:

π	=	3,1415926	→ 3,142
7/9	=	0,7777777	→ 0,778
9995/9999	=	0,999599	→ 1,000

Alle angegebenen Ziffern dieser Zahlen sind zuverlässige Ziffern. Sie werden aber aus Vereinfachungsgründen auf drei Stellen nach dem Komma verkürzt. Man beachte, dass im dritten Beispiel drei durch Rundung entstandene Nullen mitgeführt werden müssen.

Wahrer Wert, tatsächlicher Wert
Im allgemeinen Sprachgebrauch häufig benutzter Begriff für denjenigen fiktiven Wert einer Messgröße, den die Messgröße „tatsächlich“ hat. Er ist in Wirklichkeit nicht messbar, sondern der Grenzwert, dem der (gewichtete) Mittelwert einer unendlichen Menge von Messwerten zustrebt.

Richtiger sollte der Begriff „Erwartungswert“ verwendet werden.

Zahl, Ziffer
Ziffern sind die Einzelbestandteile einer Zahl. Es sind die einstelligen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9.

Ziffern, signifikante, nicht signifikante
Andere Ausdrucksweise für Ziffern, zuverlässige, nicht zuverlässige [4]
Zuverlässige Ziffern sind diejenigen Ziffern eines Messwertes, die als statistisch gesichert gelten müssen. Sie haben die Eigenschaft, bei Hinzunahme weiterer Messwerte ihren Wert nicht mehr zu verändern. (Ausnahmen: Messwerte, die in unmittelbarer Nachbarschaft einer Rundungsgrenze liegen: Bei diesen ist es möglich, dass wegen des häufigen Hin- und Herschwankens der Messwerte um die Rundungsgrenze auch die zu rundenden Ziffern beständig zwischen zwei Nachbarziffern schwanken.)

Sie müssen beim Runden beibehalten werden. (Ausnahme: Verkürzen von Zahlen; siehe dort).

Die statistisch nicht gesicherten Ziffern sind nicht zuverlässige Ziffern.

13 Literatur[1]

[1] E. Rose: Behandlung von Messergebnissen im Bereich der Messgrenze durch „Quantelung“ der Messwertangaben; 16. Jahrestagung des Fachverbandes für Strahlenschutz e. V., München, 19.-22.10.1982

[2] E. Rose, H.-U. Berger, W.J. Krause, C.D. Wüneke: Zur Frage der unteren Messgrenze in der Strahlenmesstechnik; 16. Jahrestagung des Fachverbandes für Strahlenschutz e. V., München, 19.-22.10.1982

[3] DIN 25 482, Teil 1

[4] Kleine Enzyklopädie: Mathematik, VEB Bibliografisches Institut Leipzig, 1974, 5. 622 ff

---

[1] Aufgeführt ist nur solche Literatur, die unmittelbar in Zusammenhang mit den in diesen Empfehlungen aufgestellten Regeln steht und ggf. als mathematische Beweisführung benötigt wird.